章末問題

$\boxed{1}$ $(ax+b)^{20}$の展開式において、x^k $(0 \leq k \leq 20)$ の係数を c_kとする。ただし a と b は $2b < a$ を満たす自然数であり、a^2と b^2の差は 225 である。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) $2c_k = c_{k-1}$であるとき k の値を求めよ。

［慶応大］

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は関係式 $x^3 f(x) = (x-1)g(x)$ を満たす。ただし、$f(x)$ は定数 a, b, c を用いて、$f(x) = ax^2 + bx + c$ と表される。また、$g(1) = 1$ とする。

(1) $a+b+c$ の値を求めよ。

(2) c を a のみの式で表せ。

(3) $g(x) - 1$ が $(x-1)^2$で割り切れるとき、b の値を求めよ。

［東京薬科大］

$\boxed{3}$ 多項式 $f(x)$ について、次の条件(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)を考える。

(ⅰ) $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$　　(ⅱ) $f(1-x) = f(x)$　　(ⅲ) $f(1) = 1$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 条件(ⅰ)をみたす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2) 条件(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)をすべてみたす多項式 $f(x)$ を求めよ。　［東北大］

$\boxed{4}$ (1) 2 個の負でない実数 a, b に対して、$\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b} \geq \dfrac{a+b}{1+a+b}$を示せ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 個の負でない実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$と負でない実数 c について、$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq c$ ならば

$\dfrac{a_1}{1+a_1} + \dfrac{a_2}{1+a_2} + \cdots + \dfrac{a_n}{1+a_n} \geq \dfrac{c}{1+c}$を示せ。

［鹿児島大・一部略］

$\boxed{5}$ (1) 正の実数 x, y に対して $\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} \geq 2$ が成り立つことを示し、等号が成立するための条件を求めよ。

(2) n を自然数とする。n 個の正の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$に対して、

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right) \geq n^2$ が成り立つことを示して等号が成立するための条件を求めよ。

［神戸大］