

融合問題 7 問

問 39

- (1) $(x - 2y)^6$ を展開したときの x^4y^2 の係数を求めよ。
- (2) $(x - y + 2z)^6$ を展開したときの xy^3z^2 の係数を求めよ。
- (3) $(a - b + \frac{2}{a} + \frac{1}{b})^7$ を展開したときの ab^2 の係数を求めよ。

問 40

- (1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$ の値を求めよ。
- (2) $(x + 1)^n(1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$ を用いて $({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + ({}_nC_2)^2 + \cdots + ({}_nC_n)^2$ の値を求めよ。
- (3) $1 \cdot {}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \cdots + n \cdot {}_nC_n$ の値を求めよ。

問 41

当たりが 1 本、外れが 2 本入ったくじを A さんが繰り返し引くゲームを考える。

もし A さんが当たりを引いたら A さんは 1 点の得点を獲得し、その当たりを元に戻す。

もし A さんが外れを引いたら A さんは得点を獲得できず、その外れを取り除く。

外れくじが全てなくなるまでゲームを続けるとき、A さんの得点が n 点となる確率 p_n を求めよ。

[オリジナル]

問 42

次の各問いに答えよ。

- (1) 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、10 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。
- (2) 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。
- (3) 先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし、 $n \geq 2$ とする。各車両を赤色、青色、黄色のいずれか一色で塗るとき、隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような塗り方は何通りか。

[(2) 京都大 (3) 京都大]

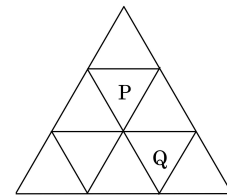
問 43

2 つの粒子が時刻 0 において $\triangle ABC$ の頂点 A に位置している。これらの粒子は独立に運動し、それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば、ある時刻で点 C にいる粒子は、その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。この 2 つの粒子が、時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。

[京都大]

問 44

図のように、正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り、部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し、1 秒ごとに、そのままその部屋にとどまることなく、辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



[東京大]

問 45

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し、次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ、表が出たときは文字列 AA を書き、裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ、同じ規則に従って、AA,B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば、コインを 5 回投げ、その結果が順に表, 裏, 裏, 表, 裏であったとすると、得られる文字列は、AABBAAB となる。このとき、左から 4 番目の文字は B、5 番目の文字は A である。

- (1) n を正の整数とする。 n 回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2) n を 2 以上の整数とする。 n 回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で、かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

[東京大]

以下の**番外編**は YouTube にて難問として扱った場合の数・確率の問題です。難しい内容もありますが、面白い問題ですので余力のある方は是非挑戦してみてください。

番外編 1

数直線上に動点 P があり、はじめに原点にあるとする。 $k = 1, 2, \dots$ に対し、 k 回目にさいころを振ったとき、1, 2 の目が出たら P は正の方向に $\frac{1}{2^k}$ だけ移動し、3, 4 の目が出たら負の方向に $\frac{1}{2^k}$ だけ移動し、5, 6 の目が出たら移動しないとする。 n 回さいころを振った後の点 P の座標を X_n とする。

- (1) $0 < X_n$ となる確率を求めよ。
- (2) $\frac{1}{2} < X_n$ となる確率を求めよ。
- (3) l は n 未満の正の整数とする。このとき、 $\frac{1}{2^l} < X_n$ となる確率を求めよ。

[千葉大医]

番外編 2

座標平面上に 8 本の直線

$$x = a \quad (a = 1, 2, 3, 4), \quad y = b \quad (b = 1, 2, 3, 4)$$

がある。以下、16 個の点

$$(a, b) \quad (a = 1, 2, 3, 4, \quad b = 1, 2, 3, 4)$$

から異なる 5 個の点を選ぶことを考える。

- (1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。
上の 8 本の直線のうち、選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。
- (2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。
上の 8 本の直線は、いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

[東京大]